No. 1 Date 07/01/2020

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Θεώρημα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις

Υπενθύμιση:

Ισχύει το εξής πόρισμα του θεωρήματος Schwarz

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f \in C^k(U)$ με $k = 0, 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow f: U \to \mathbb{R}$ είναι k-φορές συνεχώς διαφορίσιμη

Τότε
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\pi(k)} \dots \partial x_{\pi(1)}}$$

αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι της f μέχρι και k τάξης και είναι συνεχείς συναρτήσεις και για κάθε μετάθεση π των $1 \dots k$

[$f \in C^0(U) = C(U) \Leftrightarrow f: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής] (οι μερικές παράγωγοι)

Πχ για $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$, $k = 3$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$$

δηλ. δεν παίζει ρόλο με ποια «σειρά» παραγωγίζω μερικώς

ΤΕΛΟΣ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗΣ

Ορισμός: (τεχνικοί συμβολισμοί)

Ένα διάνυσμα $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ονομάζεται πολυδείκτης (multi-index) τάξης $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ με

$\alpha! = (\alpha_1!) \dots (\alpha_n!)$ (α παραγοντικό) και για $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

γράφουμε $x^{\alpha} = (x_1^{\alpha_1}) \dots (x_n^{\alpha_n})$ και

$$D^{\alpha} f(\bar{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(\bar{x}) \quad \text{για}$$

$f: U \to \mathbb{R}$ με $f \in C^{|\alpha|}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{x} \in U$

SOS (1)

Θεώρημα Taylor:

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}\in U$ και $\bar{h}\in\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $\{\bar{x}+t\bar{h} : t\in[0,1]\}\subset U$

και έστω $f\in C^{k+1}(U)$

$(k\in\mathbb{N}_0)$

$\Rightarrow \exists\, \theta\in[0,1]$

$$(*)\quad f(\bar{x}+\bar{h}) = T_{k,f,\bar{x}}(\bar{h}) + \sum_{|\alpha|=k+1} D^{\alpha}\frac{f(\bar{x}+\theta\bar{h})}{\alpha!}\,\bar{h}^{\alpha}$$

$\sum_{m=0}^{k}\sum_{|\alpha|=m}\frac{D^{\alpha}f(\bar{x})}{\alpha!}\,\bar{h}^{\alpha}$, είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f στο $\bar{x}$.

Ο τύπος (*) είναι ο τύπος του Taylor.

SOS (2)

Πόρισμα:

Έστω $f\in C^{k}(U)$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{x}\in U$

$$\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{h}) = T_{k,f,\bar{x}}(\bar{h}) + \underbrace{o(\|\bar{h}\|^{k})}_{:=\varphi(\bar{h})} \quad \text{για } \bar{h}\to\bar{0}.$$

συμβολισμός Landau

δηλ. $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}}\frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|^{k}}=0$.

Παρατήρηση:

(α) Το θεώρημα αποδεικνύεται με χρήση του θεωρήματος Taylor για πραγμ. συναρτ. μιας πραγμ. μεταβλητής (+ συνδυαστικά)

(β) Θεώρημα $\Rightarrow$ Πόρισμα
Ασκ.

Ο τύπος Taylor δίνει τοπικές προσεγγίσεις μέσω πολυωνύμων οι οποίες είναι βέλτιστες (δηλ. το υπόλοιπο είναι "εξαιρετικά" μικρό τοπικά)

Ας δούμε τις ειδικότερες περιπτώσεις $k=0,1,2$ του πορίσματος

$U \subset \mathbb{R}^n$ $\boxed{k=0}$

ανοικτό

$\bar{x} \in U$

$f \in C(U) \Rightarrow f(\bar{x}+\bar{h}) = \underbrace{T_{0,f,\bar{x}}(\bar{h})} + O(1)$ για $\bar{h} \to \bar{0}$

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$= \sum_{|a| \le 0} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} h^{a} =$$

$0 \le |a| = a_1 + \dots + a_n = 0 \Rightarrow a = (0, \dots, 0)$

$$\Sigma = h_1^0 \dots h_n^0 = 1$$

$$= \frac{D^{(0,\dots,0)} f(\bar{x})}{(0,0,\dots,0)!} = h f(\bar{x}) \text{ αφού } (0,\dots,0) = 0! \dots 0!$$

Συνεπώς για $\boxed{k=0}$ το πόρισμα λέει $f \in C(U) \Rightarrow f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x})$

δηλ. $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(\bar{x}+h) - f(x)}{1} \right) = 0$ για $h \to \bar{0}$.

$\boxed{k=1}$ $f \in C'(U) \Rightarrow f$ διαφορίσιμη

$\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{h}) = T_{1,f,x}(\bar{h}) + o(\|\bar{h}\|)$ για $h \to \bar{0}$

δηλ. $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right) h_i$

$$= D f(\bar{x}) \bar{h}$$

$$= \nabla f(\bar{x}) \bar{h}.$$

δηλ. $f(\bar{x}+\bar{h}) = \underbrace{f(x) + \nabla f(x)\bar{h} + o(\|h\|)}_{\text{γραμμική του } \bar{h}}$ για $h \to 0$

$$= T_{n,f,x}(\bar{h})$$

δηλ. $\lim \frac{f(x+h) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0$.

$\Leftrightarrow f$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$.

$\boxed{K=2}$

$$f \in C^2(U) \underset{\text{παράγωγα}}{\Longrightarrow} f(x+n) = \underbrace{f(x) + \nabla f(x)\bar{n}}_{=\sum_{|\alpha|\le 1} \frac{D^{\alpha} f(x)\bar{n}^{\alpha}}{\alpha!}} + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^2 f(x)}{\alpha!} n^{\alpha} + o(\|\bar{n}\|^2)$$

για $n \to \bar{0}$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^k$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2$

$\Rightarrow \alpha = 2\bar{e}_i = (0, \dots, \underset{\to\text{θέση}}{2}, 0, \dots, 0)$

ή $\alpha = \bar{e}_i + \bar{e}_j = (0, \dots, \underset{i\text{-θέση}}{1}, 0, \dots, 0, \underset{i\text{-θέση}}{1}, 0, \dots 0)$ με $i \neq j$

$\Leftrightarrow \alpha = e_i + e_j$ με $i \le j$ για να 'ναι όλα τα α διαφορετικά.

$$\Rightarrow \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x})}{\alpha!} n^{\alpha} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{D^{e_i+e_j} f(\bar{x})}{(e_i+e_j)!} \bar{n}^{e_i+\bar{e}_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{D^{2\alpha} f(x)}{2\bar{e}_i!} n^{2e_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{D^{e_i+e_j} f(x)}{(\bar{e}_i+\bar{e}_j)!} n^{e_i+e_j}$$

και

$$D^{2e} f(\bar{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\bar{x}), \quad D^{e_i+e_j} f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^{\alpha} f(x)}{\alpha!} n^{\alpha}}_{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} n_i^2 + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j}_{=\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j =}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j$$

$= \dots = \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \quad (\alpha_{ij})_{ij} = 1, \dots, n$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} n_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} n_j \right) = \frac{1}{2} \bar{n}^{T} A \bar{n} \in \mathbb{R}$$

$= \frac{1}{2} \bar{h}^T H f(\bar{x}) \bar{h}$ με $Hf(\bar{x}) = (\partial^2 f(\bar{x}))$

όπου $Hf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$

είναι ο Εσσιανός πίνακας της f στο $\bar{x}$.

Εδώ είναι συμμετρικός λόγω του Θ. Schwartz αφού $f \in C^2(U)$

$f \in C^2(U) \Rightarrow f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})\bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h} Hf(\bar{x}) \bar{h} + o(\|h\|^2)$

για $h \to 0$.

Δηλ.

$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})\bar{h} - \frac{1}{2} \bar{h}^T Hf(\bar{x}) \bar{h}}{\|\bar{h}\|^2} = 0 \Rightarrow$ η f είναι δύο φορές διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ με δεύτερη παράγωγο $\nabla^2 f(\bar{x}) = Hf(\bar{x})$)

Να προσέξει $Hf(\bar{x}) = J_{\nabla f}(\bar{x})$

Συνεπώς, αν $f \in C^2(U) \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

$\hookrightarrow [\bar{g} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ αν $\frac{dg_i}{dx_j}$ $U \to \mathbb{R}$

$\forall i, j = 1, \dots, n$ υπάρχουν και είναι συνεχείς$]$

$\Rightarrow J_{\nabla f}(\bar{x}) = D(Df(\bar{x})) = D^2 f(\bar{x})$.